

Ответы: ЕГЭ по Математике (профиль)

1 12

2 12

3 81

4 0,93

5 0,5

6 -5

7 15

8 5

9 7

10 72

11 -46

12 -51

13 **Решение.**

а) Преобразуем исходное уравнение:

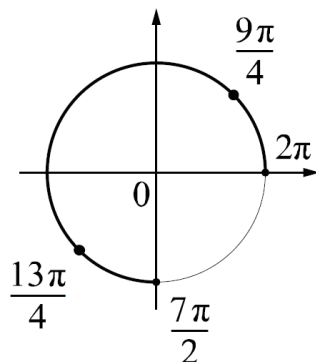
$$5^{\sin x} \cdot 2^{\sin x} = 5^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}; \quad 2^{\sin x} = 2^{\cos x}; \quad \sin x = \cos x; \quad \operatorname{tg} x = 1,$$

откуда следует, что $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим числа $\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$.



14

Решение.

а) В треугольнике SAB имеем

$$SB^2 = 72 = 56 + 16 = SA^2 + AB^2,$$

поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом SAB . Аналогично в треугольнике SAD из равенства

$$SD^2 = 65 = 56 + 9 = SA^2 + AD^2$$

получаем, что $\angle SAD = 90^\circ$. Так как прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD , прямая SA перпендикулярна плоскости ABD . Получили, что ребро SA — высота пирамиды $SABCD$.

б) На прямой AB отметим такую точку E , что $BDCE$ — параллелограмм, тогда $BE = DC = AB$ и $DB = CE$. Угол SCE искомый.

В прямоугольных треугольниках ABD , SAC и SAE

$$AC = BD = CE = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5; \quad SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 9 \quad \text{и} \quad SE^2 = SA^2 + AE^2 = 120.$$

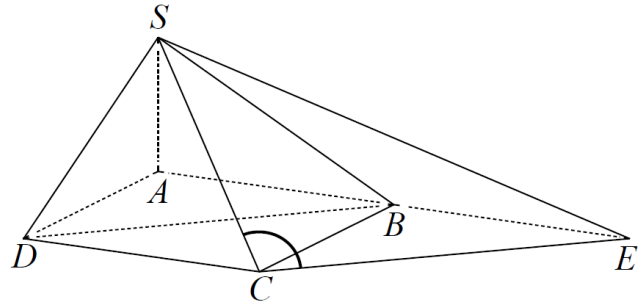
По теореме косинусов в треугольнике SCE :

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos \angle SCE; \quad 120 = 81 + 25 - 90 \cos \angle SCE;$$

$$\cos \angle SCE = -\frac{7}{45}.$$

Искомый угол равен $\arccos \frac{7}{45}$.

Ответ: б) $\arccos \frac{7}{45}$.



15

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x(4x-3)(x+4)}{x+4} - \frac{8x^3 - 28x^2 + 30x - 38}{2x-5} \geq -10.$$

При $x \neq -4$ получаем

$$\frac{8x^3 - 6x^2 - 20x^2 + 15x - 8x^3 + 28x^2 - 30x + 38 + 20x - 50}{2x-5} \geq 0;$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 12}{2x-5} \geq 0; \quad \frac{(2x-3)(x+4)}{2x-5} \geq 0,$$

откуда $-4 < x \leq \frac{3}{2}$ или $x > \frac{5}{2}$.

Ответ: $(-4; 1,5], (2,5; +\infty)$.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{14S}{15}, \dots, \frac{2S}{15}, \frac{S}{15}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS, \frac{14kS}{15}, \dots, \frac{2kS}{15}, \frac{kS}{15}.$$

Значит, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S + \frac{S}{15}, \frac{14(k-1)S + S}{15}, \dots, \frac{2(k-1)S + S}{15}, \frac{(k-1)S + S}{15}.$$

Всего следует выплатить

$$S + S(k-1) \left(1 + \frac{14}{15} + \dots + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \right) = S(1 + 8(k-1)).$$

Общая сумма выплат на 40 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$8(k-1) = 0,4; \quad k = 1,05; \quad r = 5.$$

Ответ: 5 %.

Решение.

а) Поскольку прямые AC и BC перпендикулярны, прямая BC — касательная к окружности. Прямая BO перпендикулярна прямой CN . Точка N лежит на окружности с диаметром CM , поэтому $\angle CNM = 90^\circ$. Прямые BO и MN перпендикулярны одной и той же прямой CN , следовательно, они параллельны.

б) Пусть

$$AM = x, MC = 8x.$$

Тогда

$$OC = OM = 4x, OA = 5x, AC = 9x.$$

По свойству секущей и касательной, проведённых из одной точки, $AN^2 = AM \cdot AC$, следовательно, $AN = 3x$.

Поскольку прямые MN и BO параллельны, по теореме Фалеса получаем $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MO} = \frac{1}{4}$, следовательно, $NB = 12x$. Отрезки BC и BN равны как

отрезки касательных, проведённых из одной точки, значит, $BC = 12x$.

Поскольку $\angle CMN = \angle COB$, прямоугольные треугольники CNM и BCO подобны, следовательно,

$$MN = \frac{CN \cdot CO}{BC} = \frac{9 \cdot 4x}{12x} = 3.$$

Из подобия треугольников AMN и AOB следует, что

$$BO = \frac{MN \cdot AO}{AM} = \frac{3 \cdot 5x}{x} = 15.$$

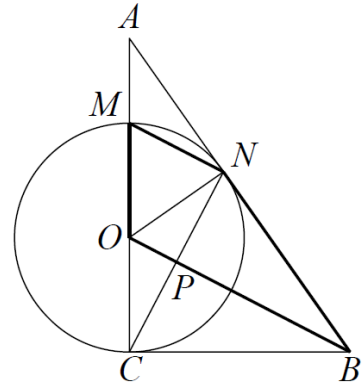
Пусть отрезки BO и CN пересекаются в точке P . Тогда P — середина CN

$$\text{и } NP = \frac{1}{2}NC = \frac{9}{2}.$$

По формуле площади трапеции

$$S_{BOMN} = \frac{BO + MN}{2} \cdot NP = \frac{15 + 3}{2} \cdot \frac{9}{2} = 40,5.$$

Ответ: б) 40,5.



Решение.

Пусть $t = |x+5| + |x-a|$, тогда уравнение запишется в виде $t^2 - 7t + 4a(7-4a) = 0$. Решения этого уравнения имеют вид $t = 4a$ или $t = 7-4a$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $|x+5| + |x-a| = 4a$ или $|x+5| + |x-a| = 7-4a$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $|x+5| + |x-a| = b$ в зависимости от a и b . Рассмотрим функцию $f(x) = |x+5| + |x-a|$. При $a \neq -5$ графиком этой функции является ломаная, состоящая из трёх звеньев, угловые коэффициенты которых равны -2 , 0 и 2 . Минимальное значение достигается на отрезке с концами -5 и a и равно $|a+5|$. Таким образом, уравнение $|x+5| + |x-a| = b$ имеет два решения при $b > |a+5|$, бесконечно много решений при $b = |a+5|$ и не имеет решений при $b < |a+5|$. В случае $a = -5$ уравнение $2|x+5| = b$ имеет два решения при $b > 0$, одно решение при $b = 0$ и не имеет решений при $b < 0$.

Уравнения $|x+5| + |x-a| = 4a$ и $|x+5| + |x-a| = 7-4a$ могут иметь общие решения при $4a = 7-4a$, то есть при $a = \frac{7}{8}$. При $a = \frac{7}{8}$ оба уравнения

принимают вид $|x+5| + \left|x - \frac{7}{8}\right| = 3,5$ и не имеют решений.

При других значениях a исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений $|x+5| + |x-a| = 4a$ и $|x+5| + |x-a| = 7-4a$ не имеет решений, а другое имеет два решения. Эти условия равносильны неравенству $(4a - |a+5|)(7-4a - |a+5|) < 0$. При $a \leq -5$ неравенство принимает вид $(5a+5)(12-3a) < 0$ и выполняется при любом $a \leq -5$. При $a > -5$ неравенство принимает вид $(3a-5)(2-5a) < 0$, откуда с учётом условия $a > -5$ получаем $-5 < a < \frac{2}{5}$; $a > \frac{5}{3}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a < \frac{2}{5}$ и $a > \frac{5}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right); \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске было 19 чисел, равных 10, и одно число, равное 1. Их среднее арифметическое равно $\frac{19 \cdot 10 + 1}{20} = 9,55$. Пусть число, равное 1, уменьшилось на 1 (после чего было стёрто с доски), а остальные числа не изменились. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{19 \cdot 10}{19} = 10$.

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна S , а после уменьшения стала равна $S - n$, где n — количество чисел, которые были уменьшены на 1, но не были стёрты с доски. По условию $\frac{S + k}{20} = 29$, то есть $S = 580 - k$. Среднее арифметическое оставшихся

чисел равно $\frac{S - n}{20 - k} = 34$, тогда получим $\frac{580 - k - n}{20 - k} = 34$. Из этого равенства находим $33k = 100 + n$. Число n лежит в пределах от 0 до 20, поэтому $100 + n$ лежит в пределах от 100 до 120. В этом промежутке нет целых чисел, делящихся на 33.

в) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна S , а после уменьшения стала равна $S - n$. По условию $\frac{S + k}{20} = 29$, то есть $S = 580 - k$. Необходимо найти наибольшее возможное значение числа $A = \frac{S - n}{20 - k}$. Имеем

$$A = \frac{S - n}{20 - k} = \frac{580 - k - n}{20 - k} \leq \frac{580 - k}{20 - k} = 1 + \frac{560}{20 - k}.$$

Число A будет наибольшим, если $n = 0$ и число k будет принимать

наибольшее возможное значение. Оценим это значение. Так как каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 50 и на доске осталось $20 - k$ чисел, для суммы S выполняется неравенство

$$580 - k = S \leq 50(20 - k),$$

откуда следует, что

$$580 - k \leq 50(20 - k); \quad 49k \leq 420; \quad k \leq \frac{60}{7} < 9; \quad k \leq 8.$$

Значит,

$$A \leq 1 + \frac{560}{20 - k} \leq 1 + \frac{560}{12} = 47\frac{2}{3}.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным $47\frac{2}{3}$. Пусть первоначально на доске было написано 8 единиц, 11 чисел, равных 50, и одно число,

равное 22. Тогда их среднее арифметическое было равно $\frac{8 + 11 \cdot 50 + 22}{20} = 29$.

Пусть 8 чисел, равных единице, уменьшились на 1 (после чего были стёрты с доски), а остальные числа не изменились. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{11 \cdot 50 + 22}{12} = 47\frac{2}{3}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $47\frac{2}{3}$.